## **基础课46 椭圆**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 椭圆的定义和标准方程 | 掌握 | 2023年北京卷  2023年天津卷  2023年全国甲卷（理）  2023年全国甲卷（文） | ★★★ | 逻辑推理数学运算直观想象 |
| 椭圆的几何性质 | 理解 | 2023年新高考Ⅰ卷 | ★★★ | 直观想象逻辑推理数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，椭圆的定义、标准方程及几何性质是命题的热点，解题常借助于平面向量、解三角形中的正、余弦定理及三角形的中位线定理等知识，预计2025年高考会考查椭圆的方程及几何性质的应用，应加强对椭圆几何性质的重视,要注意数形结合、转化与化归等解题思想的培养 | | | |

### **基础知识·诊断**

#### **夯实基础**

##### **一、椭圆的定义**

1.平面内与两个定点，的距离的①和等于常数大于的点的轨迹叫作椭圆.这两个定点叫作椭圆的③焦点，两焦点间的距离叫作椭圆的焦距，焦距的一半称为半焦距.

2.椭圆定义的数学表达式：.

3.当时，动点的轨迹为椭圆；当时，动点的轨迹是线段；当时，动点的轨迹不存在.

##### **二、椭圆的标准方程和几何性质**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 标准方程 | |  |  |
| 图形 | |  |  |
| 性质 | 范围 | , | ,④ |
| 对称性 | 对称轴：⑤轴，轴；对称中心：⑥原点 | |
| 顶点 | ，，， | ，，， |
| 轴 | 长轴的长为⑦；短轴的长为 | |
| 焦距 |  | |
| 离心率 |  | |

【注意】

1.椭圆的焦点，必在它的长轴上，焦点跟着分母大的跑.

2.椭圆的离心率越接近于1，椭圆越扁；越接近于0，椭圆越圆.

###### **知识 拓展**

1.若点在椭圆上，为椭圆的一个焦点，则；（2）.

2.焦点弦：指过焦点的弦.其中通径（垂直于长轴的焦点弦）最短,弦长.

3.焦半径公式:若是椭圆上任意一点，,分别为椭圆的左、右焦点，则,,其中.

#### **诊断自测**

##### **题组1 走出误区**

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 平面内与两个定点,的距离之和等于常数的点的轨迹是椭圆.( × )

（2） 方程表示的曲线是椭圆.( √ )

（3） 椭圆上一点与两焦点,构成的周长为（其中为椭圆的长半轴长,为椭圆的半焦距长）.( √ )

（4） 表示焦点在轴上的椭圆.( × )

2. （易错题）若椭圆的中心和左焦点分别为,，是椭圆上任一点，则的最大值为6.

【**易错点**】解答本题时容易忽视点的横坐标的取值范围而致误.

[解析]由椭圆可得,,设,，则，当且仅当时，取得最大值，最大值为6.

##### **题组2 走进教材**

3. （双空题）（人教A版选修①P109·练习T3改编）已知椭圆的左、右焦点分别为,，过的直线交椭圆于，两点，则的周长为20，的周长为16.

[解析]因为,，所以,所以的周长为，的周长为.

4. （人教A版选修改编）设点与点的距离和它到定直线的距离之比是，则点的轨迹方程是.

[解析]设，根据题意得，化简得,所以点的轨迹方程为.

##### **题组3 走向高考**

5. [2023·新高考Ⅰ卷]设椭圆,的离心率分别为,.若，则( A ).

A. B. C. D.

[解析]由，得，因此，解得，而，所以.故选.

### **考点聚焦·突破**

#### **考点一 椭圆的定义及应用［自主练透］**

1. [2024·上海模拟]已知的周长为12，,，则顶点的轨迹方程为( A ).

A. B.

C. D.

[解析]的周长为12，顶点，，

，，

， 点到两个定点的距离之和等于定值，

点的轨迹是椭圆，，，

， 点的轨迹方程为.

故选.

2. （一题多解）设,为椭圆的两个焦点，点在上，若，则( B ).

A. 1 B. 2 C. 4 D. 5

[解析]（法一：焦点三角形面积公式法）因为，所以 ，

从而，所以.故选.

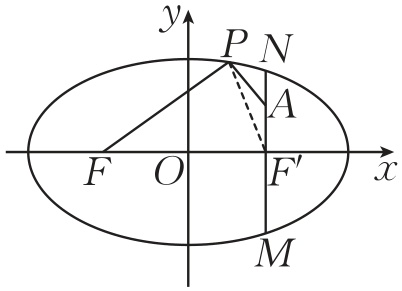
（法二：定义法）因为，所以 ，由椭圆方程可知，，解得，所以，又，

平方得，所以.故选.

3. [2024·广东统考]已知椭圆方程为,是其左焦点，是椭圆内一点，是椭圆上任意一点，若的最大值为，最小值为，则( C ).

A. B. 4 C. 8 D.

[解析]如图，设椭圆的右焦点为，连接，过点作轴且与椭圆交于,两点，



则，

当点在位置时，取到最大值；

当点在位置时，取到最小值.

故的取值范围是，即，

故的最大值，最小值，

所以.故选.



**椭圆定义应用的三种类型及解题策略**

|  |  |
| --- | --- |
| 求方程 | 通过对题设条件分析、转化，明确动点满足椭圆的定义，便可直接求解其轨迹方程 |
| 焦点三角形问题 | 利用定义求焦点三角形的周长和面积.解决焦点三角形问题常利用椭圆的定义、正弦定理或余弦定理，其中对两边同时平方是常用技巧 |
| 求最值 | 抓住，可利用基本不等式求的最值;利用定义转化或变形，借助三角形性质求最值 |

#### **考点二 椭圆的标准方程［师生共研］**

典例1 求分别满足下列条件的椭圆的标准方程：

（1）两个焦点的坐标分别是，，椭圆上任意一点到两焦点距离的和等于10；

（2）长轴长是短轴长的3倍，且经过点；

（3）经过点,，；

（4）离心率为且过点.

[解析]（1）依题意得，，，所以，则，所以椭圆方程是.

（2）若焦点在轴上，则,，此时椭圆方程是；

若焦点在轴上，则,，此时椭圆方程是.

综上可得，所求椭圆方程为或.

（3）设椭圆方程为,,且，

依题意可得解得所以椭圆方程是.

（4）若焦点在轴上，则，因为离心率，所以，

则，所以椭圆方程为；

若焦点在轴上，则，因为离心率，，

解得，所以椭圆方程为.

综上可得，所求椭圆方程为或.



**求椭圆标准方程的两种方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 定义法 | 根据椭圆的定义，确定,的值，结合焦点的位置写出椭圆方程 |
| 待定系数法 | 若焦点的位置明确，则可设出椭圆的标准方程，结合已知条件求出,的值；若焦点的位置不明确，则需要分焦点在轴上和焦点在轴上的两种情况讨论，也可设椭圆方程为 |

##### **针对训练**

1. 已知椭圆，在，，，中恰有三点在椭圆上，则椭圆的方程为.

[解析]由椭圆的几何性质可得点，，在椭圆上，代入椭圆的方程可得解得所以椭圆的方程为.

2. 已知在平面直角坐标系中，有两个圆和，其中，为正的常数，且满足,动圆分别与两圆外切、内切，则动圆圆心的轨迹方程是.（结果用含，的式子表示）

[解析]由题意知,圆心,半径,圆心,半径,当时，动圆与一个圆内切，与另一个圆外切，不妨设动圆的半径为，当与圆内切，与圆外切时，，，，

此时点的轨迹是以，为焦点的椭圆.当与圆内切，与圆外切时，同理，，此时点的轨迹是以，为焦点的椭圆.

根据椭圆定义得,，则，

所以动圆圆心的轨迹方程为.

3. （椭圆的第二定义）已知动点到定点的距离与动点到直线的距离的比值为,则动点的轨迹方程是.

[解析]设点,由题意可知，

,

两边同时平方整理得，.

故动点的轨迹方程.

4. （椭圆的第三定义）已知点,,直线，相交于点,且它们的斜率之积是,则动点的轨迹方程是.

[解析]设点，由题意可知，

，整理可得.

故动点的轨迹方程为.

#### **考点三 椭圆的简单几何性质［多维探究］**

##### **求离心率的值（范围）角度1**

典例2（1） （一题多解）已知椭圆的左顶点为，点，均在上，且关于轴对称.若直线,的斜率之积为，则的离心率为( A ).

A. B. C. D.

[解析]（法一：设而不求法）设，则,

则由,得，

由，得，

所以，即，

所以椭圆的离心率.故选.

（法二：第三定义法）设右顶点为（图略），连接，由椭圆的对称性知，故，

由椭圆的第三定义得，故,

所以椭圆的离心率.

故选.

（2） 设是椭圆的上顶点，若上的任意一点都满足，则的离心率的取值范围是( C ).

A. B. C. D.

[解析]设,易知，因为，，所以

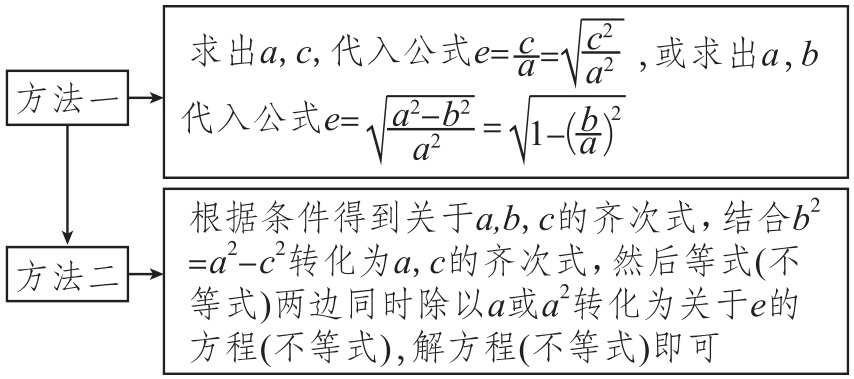
，

因为，所以当，即时，，即，符合题意，由可得，即；

当，即时，，即，化简得，显然该不等式不成立.故选.



**求椭圆离心率（或其范围）的两种常用方法**



##### **与椭圆有关的最值、范围问题角度2**

典例3（1） （多选题）设椭圆的两个焦点分别为,，上顶点为，点在上，则( BC ).

A. B. 的最大值

C. 的最大值为5 D. 的最大值为

[解析]由题意知,,，，故错误；

的最大值为，故正确；

，即，得，所以，当且仅当时，等号成立，则的最大值为5，故正确；

设，满足，由题意知，，当时，的最大值为，故错误.故选.

（2） 已知为椭圆上任意一点，为圆的任意一条直径，则的取值范围为.

[解析]由，得,，则,,，

圆的圆心恰好是椭圆的右焦点，圆的半径为2，

因为

，

且为椭圆上任意一点，为椭圆的右焦点，

所以，即，

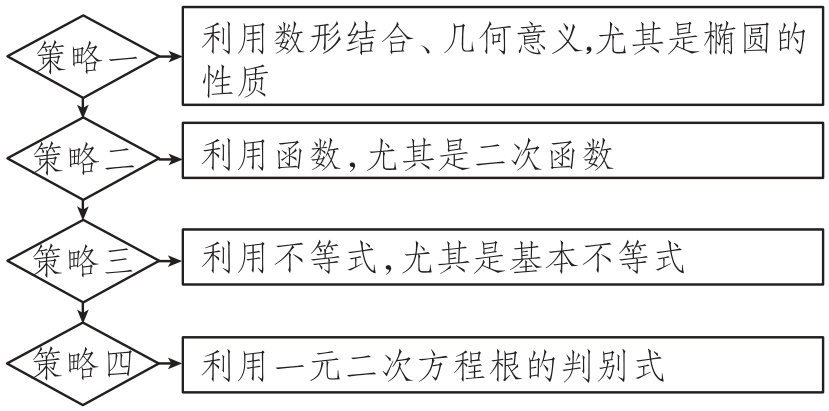
所以，

所以，

所以的取值范围为.



**与椭圆有关的最值或范围问题的求解策略**

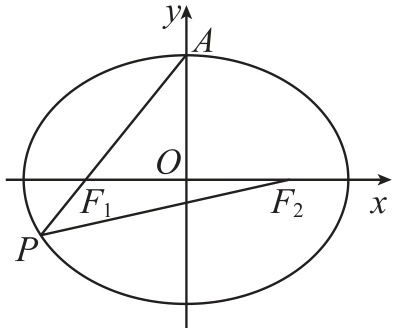


##### **多维训练**

1. [2024·河北联考]已知椭圆的上顶点为，左、右焦点分别为，，连接并延长交椭圆于另一点，若，则椭圆的离心率为( C ).

A. B. C. D.

[解析]如图，由题意得,，



所以，则.

由椭圆的定义可得，

所以，因为，

所以，

解得，，

在中，，

在中，

，

因为 ，

所以，即，

所以,所以.故选.

2. 已知焦点在轴上的椭圆的离心率，，分别是椭圆的左焦点和右顶点，是椭圆上任意一点，则的最大值为4.

[解析]由题意知，因为，所以，则，故椭圆方程为.设的坐标为，所以，.因为，，，，所以，则当时，取得最大值，最大值为4.